

## 1.1. 統計分布モデル (1) 離散分布

### Models of statistical distribution (1)

#### Discrete distribution

コンピュータで扱える数値は、現在使われているコンピュータの仕組みから、**離散的**  
ディスクリート バウンデッド **discrete** で**有界 bounded** です。連続的な数値で表されるはずの物理量も、実際には離散的な数値に置き換えて扱われます。このことは、コンピュータを使った「統計学的な解析」と呼ばれる方法や、乱数を利用する「モンテカルロ法」を利用する場合にも例外ではありません。測定のは多くは「連続的 コンティニューアス **continuous** とみなせる物理量」の評価を対象として行われますが、現実のデータでは、個々の数値が有限の個数の数字・ビット列によって扱われるだけでなく、繰り返し測定をしたとしても得られる数値は有限の個数です。

独立な連立方程式の式の数より未知数の数が多いタイプの問題は**劣決定問題**  
アンダーデターミンド プロブレム **underdetermined problem** とよばれます。有限の個数のビット列から連続的な物理量の「真の値」を決めることは、本来なら劣決定問題のはずです。

一方で、実際には「真の値」としても有限の有効桁数の数値を求めることしかできず、その意味では「許容誤差範囲で真の値とみなせる」結果を得ることによって問題は解決されることとなります。例えば繰り返し測定の実験データから平均などの代表値をとることは、むしろ**優決定** (過決定・過剰決定・決まりすぎ) オーバーデターミンド **問題 overdetermined problem** を解いていることに近いように見えるでしょう。

実際の解析では、多くの場合に何らかの「統計モデル」が使われます。あら露わな「統計モデル」を使っていないように見えたとしても、何か目立たない前提が立てられている場合が多いはずです。例えば、測定値の出現確率について、何かの統計分布モデルを仮定して、実測データの出現頻度が最大となるように「その分布を特徴付けるパラメータ」を決める方法の用いられる場合があります。そのような方法は**最尤推定** さいゆう マキシマム ライクリフッド **maximum likelihood estimation** エスティメーション と呼ばれます。統計分布モデルの含むパラメータ数は、データ数より少ないのが普通です。そのようなモデルを仮定すれば、逆に連立方程式の式の数の方が未知数より多くなるのと同じことで、やはり**優決定問題** ゆう を解くことに近くなります。

統計分布のモデルには、離散的な確率変数のモデル化の際に用いられる「離散分布モデル」と、連続的な確率変数のモデル化に用いられる「連続分布モデル」があります。

以下、代表的な離散分布モデルである**離散一様分布**と**二項分布**、**ポアソン分布**について述べます。

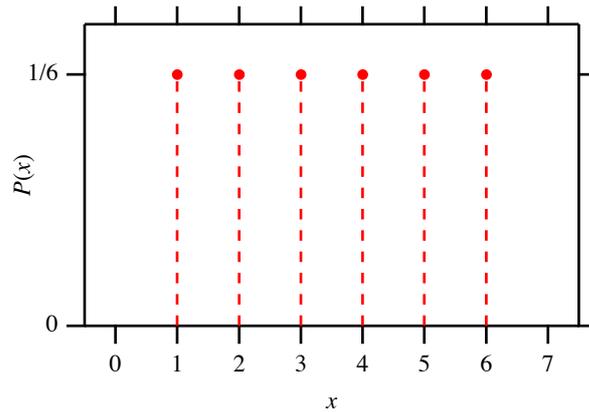
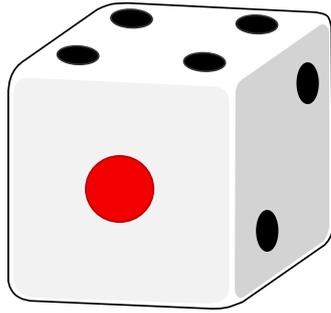


Fig. 11.1.1 離散一様分布, サイコロの例

## 11-1 離散一様分布 Discrete uniform distribution

離散的な確率変数  $X$  がどのような値をとるかが、等しい確率で表されるような確率分布が ディスクリート ユニフォーム ディストリビューション **離散一様分布 discrete uniform distribution** と呼ばれます。(イカサマ用に作られたものではない) 一つの アフフェア ダイ **サイコロ a fair die** (Fig. 11.1.1) を振ったときに出る目は、1, 2, 3, 4, 5, 6 のうちのどの数値をとる確率も概ね  $1/6$  となり、離散一様分布の典型例とされます。このことは、出る目の値  $k$  を確率変数、出る目の値  $k$  の出現確率を  $P(k)$  として、

$$P(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & [k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}] \\ 0 & [k \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}] \end{cases} \quad (11.1.1)$$

のような式で表現できます。このように確率そのものを表す関数  $P(k)$  のことは **確率質量函数 probability mass function** プロバビリティ マス ファンクション と呼ばれる場合があります。

数値計算の分野では、有限の項数の等差数列 アリスメトリック プログレッション arithmetic progression  $a_j = a_1 + (j - 1)d$  あるいは  $a_j = a_0 + jd$  ( $j = 1, \dots, n$ ) で表される値  $\{a_j\}$  のうち、どの値の出現確率も  $1/n$  である場合を離散一様分布、あるいは単に一様分布と呼びます。このことは

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & [x \in \{a_1, \dots, a_n\}] \\ 0 & [x \notin \{a_1, \dots, a_n\}] \end{cases} \quad (11.1.2)$$

のように表現できます。この場合に、**平均  $\langle x \rangle$**  は

$$\langle x \rangle = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} \quad (11.1.3)$$

あるいは

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_0 + jd) = a_0 + \frac{d}{n} \sum_{j=1}^n j = a_0 + \frac{d(n+1)}{2} \quad (11.1.4)$$

のように書けます。

離散一様分布の平方平均  $\langle x^2 \rangle$  は平方和の公式 (補足 11.1.A) を使えば

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_0 + jd)^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (a_0^2 + 2a_0jd + j^2d^2) \\ &= a_0^2 + \frac{2a_0d}{n} \sum_{j=1}^n j + \frac{d^2}{n} \sum_{j=1}^n j^2 = a_0^2 + a_0d(n+1) + \frac{d^2(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned} \quad (11.1.5)$$

となります。式 (11.1.4) と式 (11.1.5) から、離散一様分布の分散  $\sigma^2$  は

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ &= a_0^2 + a_0d(n+1) + \frac{d^2(n+1)(2n+1)}{6} - a_0^2 - a_0d(n+1) - \frac{d^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{d^2(n+1)[2(2n+1) - 3(n+1)]}{12} = \frac{d^2(n+1)(n-1)}{12} = \frac{d^2(n^2-1)}{12} \end{aligned} \quad (11.1.6)$$

となります。

確率変数  $x$  が連続変数の場合には、離散一様分布の確率密度関数 プロバビリティ デンシティ probability density ファンクション function  $f(x)$  を、

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta(x - a_j) \quad (11.1.7)$$

と表現することができます。ここで関数  $\delta(x)$  ( $\delta$  はギリシャ文字小文字のデルタ) はディラックのデルタ関数 Dirac delta です (補足 11.1.B)。「確率質量関数」と「確率密度関数」の違いには注意してください。

左右対称な形状を持つ確率質量関数と確率密度関数の「3階以上の奇数階キュムラント」はすべてゼロになります。離散一様分布をグラフ化した時の形状は左右対称な (平均位置を対称軸とする線対称性を持つ) ので、離散一様分布関数の3階キュムラントも歪度もゼロです。

離散一様分布の一般形について4階以上のキュムラントの形式をあからさまな方法で導くことは簡単ではないので、ここでは単純化した離散一様分布の尖度  $\gamma_2 = \kappa_4 / \kappa_2^2$  を求めます。かりに、

$$P'(x') = \begin{cases} \frac{1}{n} \left[ x' \in \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2} \right\} \right] \\ 0 \left[ x' \notin \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2} \right\} \right] \end{cases} \quad (11.1.8)$$

として、 $x'$  のとりうる値は初項  $-1/2$ 、公差  $1/(n-1)$ 、 $n$  項の等差数列とします。第  $j$  項の値は  $-1/2 + (j-1)/(n-1)$  と表されます。平均と3階キュムラントはゼロになり、分散  $\sigma^2$  は平方平均と等しくなることから、この分布の分散は

$$\sigma'^2 = \langle x'^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( -\frac{1}{2} + \frac{j-1}{n-1} \right)^2 = \frac{n+1}{12(n-1)}$$

となります (補足 11.1.C)。また 4 階キュムラント  $\kappa_4'$  の値は

$$\kappa_4' = -\frac{(n+1)(n^2+1)}{120(n-1)^3} \quad (11.1.11)$$

となり、このことから項数  $n$  の離散一様分布の<sup>せん</sup>尖度  $\gamma_2$  は

$$\gamma_2 = \frac{\kappa_4'}{\sigma'^2} = -\frac{6(n^2+1)}{5(n^2-1)} \quad (11.1.12)$$

となります (補足 11.1.D)。したがって、式 (11.1.2) で表される離散一様分布の**4 階キュムラント**は、

$$\begin{aligned} \kappa_4 &= \gamma_2 \sigma^4 = -\frac{6(n^2+1)}{5(n^2-1)} \times \left[ \frac{d^2(n^2-1)}{12} \right]^2 = -\frac{(n^2+1)(n^2-1)d^4}{120} \\ &= -\frac{(n^4-1)d^4}{120} \end{aligned} \quad (11.1.13)$$

と表されます。

離散一様分布の**中央値**は、中央値の定義のしかたによって変わります。「 $L_1$  ノルムを最小化する値」あるいは「累積分布関数の値が 1/2 となる値」と定義した場合、データ数  $n$  が奇数の場合には一意に確定しますが、偶数の場合にはデータの間隔に相当する幅の間にあるどの数値をとっても良いこととなります。

離散一様分布の**ミッドレンジ** (ミニマックス値, 中点値) は平均値と一致します。

離散一様分布の<sup>ひん</sup>**最頻値**は常に複数 ( $n$  個) 存在し、一つの数値を最頻値として選ぶことはできません。

## 11-2 二項分布 Binomial distribution

**サイコロ** フェアダイ a fair die を 1 回振って、例えば「1」の目が出る確率は 1/6 ですが、「 $n$  回振ったときに『1』の目が  $k$  回出る確率」あるいは「 $n$  個のサイコロを同時に振った時に『1』の目のサイコロが  $k$  個である確率」はどのように表されるのでしょうか? そのような確率分布は**二項分布** バイノミアル ディストリビューション binomial distribution と呼ばれます。

1 回の試行で、ある<sup>イヴェント</sup>**事象** event の出現する確率が  $p$  であるとします。 $n$  回の試行でその事象が  $k$  回出現する確率は、以下の式で表されます。

$$P(k; n, p) = {}_n C_k (1-p)^{n-k} p^k \quad (11.2.1)$$

ここで  ${}_n C_k$  の記号

$${}_n C_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (11.2.2)$$

は  $n$  個から  $k$  個を選ぶ場合の数 (combination; number of combination) であり、

$${}_n C_k = \binom{n}{k} \quad (11.2.3)$$

と表記されることもあります。

式 (11.2.1) で表される確率分布を二項分布と呼びます。出現回数  $k$  は 0 回から  $n$  回までのどれかなので、以下の関係は必ず成立します。

$$\sum_{k=0}^n P(k; n, p) = 1 \quad (11.2.4)$$

二項分布の平均  $m$  は

$$m = np \quad (11.2.5)$$

となり (補足 11.2.A) , 分散  $\sigma^2$  は

$$\sigma^2 = np(1-p) \quad (11.2.6)$$

となります (補足 11.2.B) 。

二項分布の 3 階キュムラント  $\kappa_3$  と歪度  $\gamma_1$  は、

$$\kappa_3 = np(1-p)(1-2p) \quad (11.2.7)$$

$$\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (11.2.8)$$

となります (補足 11.2.C) 。試行回数  $n$  が増えれば二項分布の歪度はゼロに近づき、左右対称な形状に近づきます。

二項分布の 4 階キュムラント  $\kappa_4$  と尖度  $\gamma_2$  は、

$$\kappa_4 = np(1-p)(1-6p+6p^2) \quad (11.2.9)$$

$$\gamma_2 = \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)} \quad (11.2.10)$$

となります (補足 11.2.D) 。試行回数  $n$  が増えれば二項分布の尖度もゼロに近づきます。

$$\begin{aligned} P(k+1; n, p) - P(k; n, p) &= \frac{n!(1-p)^{n-k-1}p^{k+1}}{(n-k-1)!(k+1)!} - \frac{n!(1-p)^{n-k}p^k}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n![(n-k)p - (k+1)(1-p)](1-p)^{n-k-1}p^k}{(n-k)!(k+1)!} \\ &= \frac{n![(n+1)p - k - 1](1-p)^{n-k-1}p^k}{(n-k)!(k+1)!} \end{aligned} \quad (11.2.11)$$

の関係から、 $k < (n+1)p$  の範囲では  $k$  の増大にともなって確率  $P(k; n, p)$  が増大し、 $(n+1)p - 1 < k$  の範囲では確率は減少します。したがって、二項分布の最頻値  $k_{\text{mode}}$  には、

$$k_{\text{mode}} = \lfloor (n+1)p \rfloor \quad (11.2.12)$$

と

$$k_{\text{mode}} = \lceil (n+1)p - 1 \rceil = \lceil (n+1)p \rceil - 1 \quad (11.2.13)$$

の2つがあります。 $\lfloor x \rfloor$  の記号は<sup>ゆか</sup>床函数 floor function と呼ばれ「 $x$  以下の最大の整数」

(切り捨て) を意味し、 $\lceil x \rceil$  の記号は<sup>てんじょう</sup>天井函数 ceiling function と呼ばれ「 $x$  以上の最小の整数」(切りあげ) を意味します。 $(n+1)p$  が整数でなければ、式 (11.2.12) で表される数値と式 (11.2.13) で表される数値は一致しますが、 $(n+1)p$  が整数の場合には、異なる数値になります。

例えば、<sup>こうか</sup>硬貨投げ <sup>コイン トス</sup> coin toss を 3 回繰り返した時、<sup>おもて</sup>表が 1 回も出ない確率と 3 回出る確率はそれぞれ 1/8 で、表が 1 回出る確率と 2 回出る確率がそれぞれ 3/8 なので、表の出る回数<sup>さいひんち</sup>の最頻値は「1」と「2」の2つあることになります。

二項分布の<sup>ミディアン</sup>中央値 (中位数, メジアン) median,  $k_{\text{median}}$  を単純な数式で表現することは難しいことが知られています。

### 11-3 ポアソン分布 Poisson distribution

微弱な光や X 線の強度を測定するために、一定の時間に検出された光子を数える光子計数法<sup>フォトン カウンティング メソッド</sup> photon counting method を用いる場合、検出される光子の数 (カウント数) は基本的にはポアソン分布 Poisson distribution に従います。ただし現実の検出システムの反応時間は有限なので、「数え落とし」が生じることを考慮しなければいけない場合もあります

([補足 11.3.A](#))。光子計数だけでなく、一定時間内にコンビニエンス・ストアに来店する客の数、機械や部品の故障の発生数、地震の発生数など、基本的にはポアソン分布に従うことを前提として解釈される現象が多くあります。

ポアソン分布は、「**二項分布** ([11-2 節](#)) の特殊例 (極限) であり、試行回数を無限大 ( $n \rightarrow \infty$ ) とし、1 回の試行あたりの特定の事象の出現確率を無限小 ( $p \rightarrow 0$ )、ただし試行回数  $n$  とその事象の出現確率  $p$  の積が有限の一定値  $\lambda$  (ギリシャ文字のラムダ) ( $np = \lambda$ ) とみなせる場合である」と説明される場合があります。

光子の検出器への入射頻度 (単位時間あたりに入射する光子数の平均値) を  $\nu$  (ギリシャ文字のニュー) とします。計数 (カウント) 時間を  $t$  とすれば、カウント数の期待値は  $\nu t$  で表されます。この値を  $\lambda = \nu t$  とします。計数時間を十分に短い時間  $dt$  ( $dt = t/n$ ) に区切れば、その微小時間にカウントされる光子数は 0 か 1 かのどちらかになり、ほとんどの微小時間区間ではカウントされる光子数が 0 となる状況になるはずで、微小時間区間に光子が検出される確率は  $p = \lambda/n$  と表され、有限時間  $t$  の間にカウントされる光子数の確率分布は

$$P(k; \lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\text{binomial}} \left( k; n, \frac{\lambda}{n} \right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (11.3.1)$$

となります (補足 11.3.B)。ただし、ここで

$$P_{\text{binomial}}(k; n, p) \equiv {}_n C_k (1-p)^{n-k} p^k \quad (11.3.2)$$

は二項分布の確率分布を表すとします。

式 (11.3.1) で表される確率分布をポアソン分布と呼びます。出現回数  $k$  は 0 回から  $\infty$  回までのいずれかの値をとり得ます。したがって

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \lambda) = 1 \quad (11.3.3)$$

の関係が成立します。ポアソン分布の平均  $m$  は

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} e^{-\lambda} = \lambda \quad (11.3.4)$$

となります。同じように、ポアソン分布の二乗平均は

$$\langle k^2 \rangle = \lambda^2 + \lambda \quad (11.3.5)$$

となり、分散  $\sigma^2$  は

$$\sigma^2 = \langle k^2 \rangle - m^2 = \lambda \quad (11.3.6)$$

となります。

ポアソン分布には、1 階以上の任意の階数のキュムラントの値が平均  $\lambda$  に等しくなるという特徴があります (補足 11.3.C)。

ポアソン分布の 3 階キュムラント  $\kappa_3$  と歪度  $\gamma_1$  は、

$$\kappa_3 = \lambda \quad (11.3.7)$$

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (11.3.8)$$

となります。平均値 (平均カウント数)  $\lambda$  が増えればポアソン分布の歪度はゼロに近づき、左右対称な形状に近づきます。

ポアソン分布の 4 階キュムラント  $\kappa_4$  と尖度  $\gamma_2$  は、

$$\kappa_4 = \lambda \quad (11.3.9)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\lambda} \quad (11.3.10)$$

となり、 $\lambda$  が増えれば尖度もゼロに近づきます。

$$P(k+1; \lambda) - P(k; \lambda) = \frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda}}{(k+1)!} - \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \left( \frac{\lambda}{k+1} - 1 \right) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (11.3.11)$$

の関係から、 $k < \lambda - 1$  の範囲では  $k$  の増加にともなって確率  $P(k; \lambda)$  が増大し、 $\lambda < k$  の範囲で確率は減少します。したがって、ポアソン分布の最頻値  $k_{\text{mode}}$  には、

$$k_{\text{mode}} = \lceil \lambda - 1 \rceil \quad (11.3.12)$$

と

$$k_{\text{mode}} = \lfloor \lambda \rfloor \quad (11.3.13)$$

の2つがあります。 $\lfloor x \rfloor$  の記号は<sup>ゆか</sup>床函数 floor function と呼ばれ「 $x$  以下の最大の整数」（小数点以下を切り捨てた数）を意味し、 $\lceil x \rceil$  の記号は天井函数 ceiling function と呼ばれ「 $x$  以上の最小の整数」（小数点以下を切りあげた数）を意味します。 $\lambda$  が整数でなければ、式 (11.3.12) で表される数値と式 (11.3.13) で表される数値は一致しますが、 $\lambda$  が整数の場合には、異なる数値になります。つまりポアソン分布の最頻値  $k_{\text{mode}}$  は2つの値をとり、一つの値には決まらないことがあります。

ポアソン分布の中央値（中位数，メジアン）<sup>ミディアン</sup> median,  $k_{\text{median}}$  を単純な数式で表現することは困難であることが知られています。

平均  $\lambda$  のポアソン分布では、標準偏差が  $\sqrt{\lambda}$  となります。ポアソン分布に従う現象について、繰り返し実験をし、実測値が  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  であった場合に、算術平均

$$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n k_j \quad (11.3.14)$$

が  $\lambda$  の最尤推定解であり、不偏推定値であることが知られています。また、ポアソン分布を仮定できるのであれば、分散や高階のキュムラントも  $\lambda$  に等しくなるので、かりに一回だけの測定であっても、形式的には全ての階数のキュムラントの不偏推定値が求まります。

## 補足

### (補足 11.1.A) 平方和の公式 (↔)

以下の関係

$$j^3 - (j-1)^3 = 3j^2 - 3j + 1 \quad (11.1.A.1)$$

から、

(→ 両辺について  $j = 1$  から  $n$  までの和をとって)

$$\sum_{j=1}^n [j^3 - (j-1)^3] = 3 \sum_{j=1}^n j^2 - 3 \sum_{j=1}^n j + n \quad (\rightarrow \sum_{j=1}^n (j-1)^3 = \sum_{j=0}^{n-1} j^3 \text{ の関係から})$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n j^3 - \sum_{j=0}^{n-1} j^3 = 3 \sum_{j=1}^n j^2 - 3 \sum_{j=1}^n j + n \quad (\rightarrow \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \text{ だから})$$

$$\Rightarrow n^3 = 3 \sum_{j=1}^n j^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n \quad (\rightarrow \sum_{j=1}^n j^2 \text{ について解いて})$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{2n^3 + 3n(n+1) - 2n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (11.1.A.2)$$

という関係（平方和の公式）が導かれます。

同じように立方和の公式 (補足 11.1.A.1) や 4 階冪和の公式 (補足 11.1.A.2) を導くこともできます。 (↔)

### (補足 11.1.A.1) 立方和の公式 (↔)

以下の関係

$$j^4 - (j-1)^4 = 4j^3 - 6j^2 + 4j - 1 \quad (11.1.A.1.1)$$

から,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [j^4 - (j-1)^4] &= 4 \sum_{j=1}^n j^3 - 6 \sum_{j=1}^n j^2 + 4 \sum_{j=1}^n j - n \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n j^4 - \sum_{j=0}^{n-1} j^4 &= 4 \sum_{j=1}^n j^3 - 6 \sum_{j=1}^n j^2 + 4 \sum_{j=1}^n j - n \\ \Rightarrow n^4 &= 4 \sum_{j=1}^n j^3 - n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) - n \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n j^3 &= \frac{n[n^3 + (n+1)(2n+1) - 2(n+1) + 1]}{4} = \frac{n(n^3 + 2n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 + 1)}{4} \\ &= \frac{n(n^3 + 2n^2 + n)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned} \quad (11.1.A.1.2)$$

という関係が導かれます。 (↔)

### (補足 11.1.A.2) 四階冪和の公式 (↔)

以下の関係

$$j^5 - (j-1)^5 = 5j^4 - 10j^3 + 10j^2 - 5j + 1 \quad (11.1.A.2.1)$$

から,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [j^5 - (j-1)^5] &= 5 \sum_{j=1}^n j^4 - 10 \sum_{j=1}^n j^3 + 10 \sum_{j=1}^n j^2 - 5 \sum_{j=1}^n j + n \\ \Rightarrow n^5 &= 5 \sum_{j=1}^n j^4 - \frac{5n^2(n+1)^2}{2} + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{5n(n+1)}{2} + n \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n j^4 &= \frac{n[6n^4 + 15n(n+1)^2 - 10(n+1)(2n+1) + 15(n+1) - 6]}{30} \\ &= \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 30n^2 + 15n - 20n^2 - 30n - 10 + 15n + 15 - 6)}{30} \\ &= \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30} = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30} \end{aligned} \quad (11.1.A.2.2)$$

という関係が導かれます。 (↔)

### (補足 11.1.B) ディラックのデルタ関数 Dirac delta function (↔)

ディラックのデルタ関数 ディラック デルタ ファンクション Dirac delta function  $\delta(x)$  は、普通の意味での関数ではなく、**一般化された関数** ジェネラライズド ディストリビューション generalized function あるいは **超関数** distribution と呼ばれる場合があります。ディラックのデルタ関数は理

学・工学の広い分野で利用されます。分野によっては、インパルス函数と呼ばれる場合もあります。任意の連続函数  $f(x)$  に対して、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (11.1.B.1)$$

という関係を満たす  $\delta(x)$  として定義することができます。デルタ函数は以下のような性質を持ちます。

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & [x = 0] \\ 0 & [x \neq 0] \end{cases} \quad (11.1.B.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (11.1.B.3)$$

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \begin{cases} f(0) & [a \leq 0 \leq b] \\ -f(0) & [b \leq 0 \leq a] \\ 0 & [\text{otherwise}] \end{cases} \quad (11.1.B.4)$$

(↔)

### (補足 11.1.C) 単純化された離散一様分布の分散の導出 (↔)

単純化した離散一様分布  $x \in \{-1/2, -1/2 + 1/(n-1), \dots, 1/2\}$  の分散は、

$$\begin{aligned} \sigma'^2 = \langle x'^2 \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( -\frac{1}{2} + \frac{j-1}{n-1} \right)^2 = \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_{j=1}^n \left( -\frac{n-1}{2} + j-1 \right)^2 \\ &= \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_{j=1}^n \left( -\frac{n+1}{2} + j \right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4(n-1)^2} - \frac{n+1}{n(n-1)^2} \sum_{j=1}^n j + \frac{1}{n(n-1)^2} \sum_{j=1}^n j^2 \end{aligned}$$

と表され、等差数列の和の公式と平方和の公式 (補足 11.1.A) とから

$$\begin{aligned} \sigma'^2 &= \frac{(n+1)^2}{4(n-1)^2} - \frac{n+1}{n(n-1)^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n(n-1)^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4(n-1)^2} - \frac{(n+1)^2}{2(n-1)^2} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6(n-1)^2} = \frac{3n^2 + 6n + 3 - 6n^2 - 12n - 6 + 4n^2 + 6n + 2}{12(n-1)^2} \\ &= \frac{n^2 - 1}{12(n-1)^2} = \frac{n+1}{12(n-1)} \end{aligned} \quad (11.1.C.1)$$

となります。 (↔)

### (補足 11.1.D) 離散一様分布の尖度の導出 (↔)

単純化した離散一様分布  $x \in \{-1/2, -1/2 + 1/(n-1), \dots, 1/2\}$  の4乗平均は

$$\begin{aligned} \langle x^4 \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( -\frac{1}{2} + \frac{j-1}{n-1} \right)^4 = \frac{1}{n(n-1)^4} \sum_{j=1}^n \left( -\frac{n-1}{2} + j-1 \right)^4 \\ &= \frac{(n+1)^4}{16(n-1)^4} - 4 \frac{(n+1)^3}{8n(n-1)^4} \sum_{j=1}^n j + 6 \frac{(n+1)^2}{4n(n-1)^4} \sum_{j=1}^n j^2 - 4 \frac{(n+1)}{2n(n-1)^4} \sum_{j=1}^n j^3 + \frac{1}{n(n-1)^4} \sum_{j=1}^n j^4 \\ &= \frac{(n+1)^4}{16(n-1)^4} - \frac{(n+1)^3}{2n(n-1)^4} \sum_{j=1}^n j + \frac{3(n+1)^2}{2n(n-1)^4} \sum_{j=1}^n j^2 - \frac{2(n+1)}{n(n-1)^4} \sum_{j=1}^n j^3 + \frac{1}{n(n-1)^4} \sum_{j=1}^n j^4 \end{aligned}$$

と表され、平方和・立方和・四階幂和の公式 (補足 11.1.1.A) (補足 11.1.1.A.1) (補足 11.1.1.A.2) から、

$$\begin{aligned}
\langle x^4 \rangle &= \frac{(n+1)^4}{16(n-1)^4} - \frac{(n+1)^3}{2n(n-1)^4} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3(n+1)^2}{2n(n-1)^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\quad - \frac{2(n+1)}{n(n-1)^4} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{n(n-1)^4} \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\
&= \frac{(n+1)^4}{16(n-1)^4} - \frac{(n+1)^4}{4(n-1)^4} + \frac{(n+1)^3(2n+1)}{4(n-1)^4} - \frac{n(n+1)^3}{2(n-1)^4} + \frac{(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30(n-1)^4} \\
&= -\frac{3(n+1)^4}{16(n-1)^4} + \frac{(n+1)^3(2n+1)}{4(n-1)^4} - \frac{n(n+1)^3}{2(n-1)^4} + \frac{(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30(n-1)^4} \\
&= \frac{(n+1)^3(-3n-3+8n+4-8n)}{16(n-1)^4} + \frac{(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30(n-1)^4} \\
&= \frac{(n+1)^3(-3n+1)}{16(n-1)^4} + \frac{(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30(n-1)^4} \\
&= \frac{(n+1)(-3n+1)(n^2+2n+1)}{16(n-1)^4} + \frac{(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30(n-1)^4} \\
&= \frac{(n+1)(-3n^3-5n^2-n+1)}{16(n-1)^4} + \frac{(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30(n-1)^4} \\
&= \frac{(n+1)(-45n^3-75n^2-15n+15)}{240(n-1)^4} + \frac{(n+1)(48n^3+72n^2+8n-8)}{240(n-1)^4} \\
&= \frac{(n+1)(3n^3-3n^2-7n+7)}{240(n-1)^4} = \frac{(n+1)(3n^2-7)}{240(n-1)^3} \tag{11.1.D.1}
\end{aligned}$$

となり，したがって，4階キュムラントは

$$\begin{aligned}
\kappa_4' &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( -\frac{1}{2} + \frac{j-1}{n-1} \right)^4 - 3\sigma'^4 = \frac{(n+1)(3n^2-7)}{240(n-1)^3} - 3 \left[ \frac{n+1}{12(n-1)} \right]^2 \\
&= \frac{(n+1)(3n^2-7)}{240(n-1)^3} - \frac{(n+1)^2}{48(n-1)^2} = \frac{(n+1) \left[ (3n^2-7) - 5(n-1)(n+1) \right]}{240(n-1)^3} \\
&= \frac{(n+1)(3n^2-7-5n^2+5)}{240(n-1)^3} = -\frac{(n+1)(n^2+1)}{120(n-1)^3} \tag{11.1.D.2}
\end{aligned}$$

となり，尖度 kurtosis は

$$\gamma_2' = \frac{\kappa_4'}{\sigma^2} = -\frac{(n+1)(n^2+1)}{120(n-1)^3} \times \frac{144(n-1)^2}{(n+1)^2} = -\frac{6(n^2+1)}{5(n-1)(n+1)} = -\frac{6(n^2+1)}{5(n^2-1)} \tag{11.1.D.3}$$

と表されます。 (↔)

### (補足 11.2.A) 二項分布の平均の導出 (↔)

二項分布の平均  $\langle k \rangle$  は

$$\begin{aligned}
\langle k \rangle &= \sum_{k=0}^n k P(k; n) = \sum_{k=0}^n \frac{kn!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k && (k=0 \text{ の項はゼロなので } \rightarrow) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{kn!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k && (n! = n(n-1)! \text{ と } k! = k(k-1)! \text{ から } \rightarrow) \\
&= np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} (1-p)^{n-k} p^{k-1} && (k' = k-1 \Leftrightarrow k = k'+1 \text{ とすると } \rightarrow)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= np \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k')!k'!} (1-p)^{n-1-k'} p^{k'} && (P(k;n) = \frac{n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k \text{ から } \rightarrow) \\
&= np \sum_{k'=0}^{n-1} P(k'; n-1) && (\sum_{k=0}^n P(k;n) = 1 \text{ for } \forall n, \forall k \text{ だから } \rightarrow) \\
&= np && (11.2.A.1)
\end{aligned}$$

のように導出することができます。 (↔)

### (補足 11.2.B) 二項分布の分散の導出 (↔)

二項分布の平方平均  $\langle k^2 \rangle$  は

$$\begin{aligned}
\langle k^2 \rangle &= \sum_{k=0}^n k^2 P(k;n) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^2 n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k && (k=0 \text{ の項はゼロ。 } k^2 = k(k-1) + k \text{ から } \rightarrow) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{[k(k-1) + k] n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k && (\text{展開すれば 1 番目の和の } k=1 \text{ の項がゼロなので } \rightarrow) \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k + \sum_{k=1}^n \frac{kn!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k && (\text{式 (11.1.2.A.1) を使って } \rightarrow) \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} (1-p)^{n-k} p^{k-2} + np && (k-2 = k' \Leftrightarrow k = k'+2 \text{ として } \rightarrow) \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} P(k'; n-2) + np && (\sum_{k=0}^n P(k;n) = 1 \text{ for } \forall n, \forall k \text{ だから } \rightarrow) \\
&= n(n-1)p^2 + np = np[(n-1)p + 1] && (11.2.B.1)
\end{aligned}$$

となるので、分散  $\sigma^2$  は、

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = np[(n-1)p + 1] - (np)^2 = np[(n-1)p + 1] - (np)^2 \\
&= -np^2 + np = np(1-p) && (11.2.B.2)
\end{aligned}$$

となります。 (↔)

### (補足 11.2.C) 二項分布の3階キュムラントと歪度の導出 (↔)

二項分布の立方平均は

$$\begin{aligned}
\langle k^3 \rangle &= \sum_{k=0}^n k^3 P(k;n) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^3 n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k && (k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k \text{ から } \rightarrow) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{[k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + k] n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)(k-2)n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k + 3 \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \frac{kn!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k \\
&= n(n-1)(n-2)p^3 \sum_{k=3}^n \frac{(n-3)!}{(n-k)!(k-3)!} (1-p)^{n-k} p^{k-3} + 3n(n-1)p^2 + np \\
&= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np \tag{11.2.C.1}
\end{aligned}$$

となるので、3階キュムラント  $\kappa_3$  は、

$$\begin{aligned}
\kappa_3 &= \langle k^3 \rangle - 3\langle k^2 \rangle \langle k \rangle + 2\langle k \rangle^3 \\
&= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np - 3\{np[(n-1)p+1]\}np + 2n^3p^3 \\
&= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np - 3\{np[(n-1)p+1]\}np + 2n^3p^3 \\
&= np \left( (n-1)(n-2)p^2 + 3(n-1)p + 1 - 3\{np[(n-1)p+1]\} + 2n^2p^2 \right) \\
&= np \left[ (n^2 - 3n + 2)p^2 + 3(n-1)p + 1 - 3n(n-1)p^2 - 3np + 2n^2p^2 \right] \\
&= np \left[ (n^2 - 3n + 2)p^2 + (3n-3)p + 1 - (3n^2 - 3n)p^2 - 3np + 2n^2p^2 \right] \\
&= np \left[ (-3n+2)p^2 + (3n-3)p + 1 - (-3n)p^2 - 3np \right] \\
&= np \left[ 2p^2 + (3n-3)p + 1 - 3np \right] \\
&= np \left( 2p^2 - 3p + 1 \right) \\
&= np(1-p)(1-2p) \tag{11.2.C.2}
\end{aligned}$$

となり、歪度  $\gamma_1$  は、

$$\gamma_1 = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} = \frac{np(1-p)(1-2p)}{[n(1-p)p]^{3/2}} = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{11.2.C.3}$$

となります。 (↔)

#### (補足 11.2.D) 二項分布の4階キュムラントと尖度の導出 (↔)

二項分布の4階<sup>べき</sup>平均  $\langle k^4 \rangle$  は

$$\begin{aligned}
\langle k^4 \rangle &= \sum_{k=0}^n k^4 P(k; n) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^4 n! (1-p)^{n-k} p^k}{(n-k)!k!} \quad (k^4 = k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k(k-1)(k-2) + 7k(k-1) + k \text{ から} \rightarrow) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{[k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k(k-1)(k-2) + 7k(k-1) + k] n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{[k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k(k-1)(k-2) + 7k(k-1) + k] n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} p^k \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np \tag{11.2.D.1}
\end{aligned}$$

であり、4階キュムラント  $\kappa_4$  は

$$\begin{aligned}
\kappa_4 &= \langle k^4 \rangle - 4\langle k^3 \rangle \langle k \rangle + 3\langle k^2 \rangle^2 + 12\langle k^2 \rangle \langle k \rangle^2 - 6\langle k \rangle^4 \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np \\
&\quad - 4[n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np]np - 3\{np[(n-1)p + 1]\}^2 \\
&\quad + 12np[(n-1)p + 1](np)^2 - 6(np)^4 \\
&= np \left[ (n-1)(n-2)(n-3)p^3 + 6(n-1)(n-2)p^2 + 7(n-1)p + 1 \right. \\
&\quad \left. - 4n(n-1)(n-2)p^3 - 12n(n-1)p^2 - 4np \right. \\
&\quad \left. - 3n(n-1)^2p^3 - 6n(n-1)p^2 - 3np \right. \\
&\quad \left. + 12n^2(n-1)p^3 + 12n^2p^2 - 6n^3p^3 \right] \\
&= np \left( -6p^3 + 12p^2 - 7p + 1 \right) \\
&= np(1-p)(1-6p+6p^2) \tag{11.2.D.2}
\end{aligned}$$

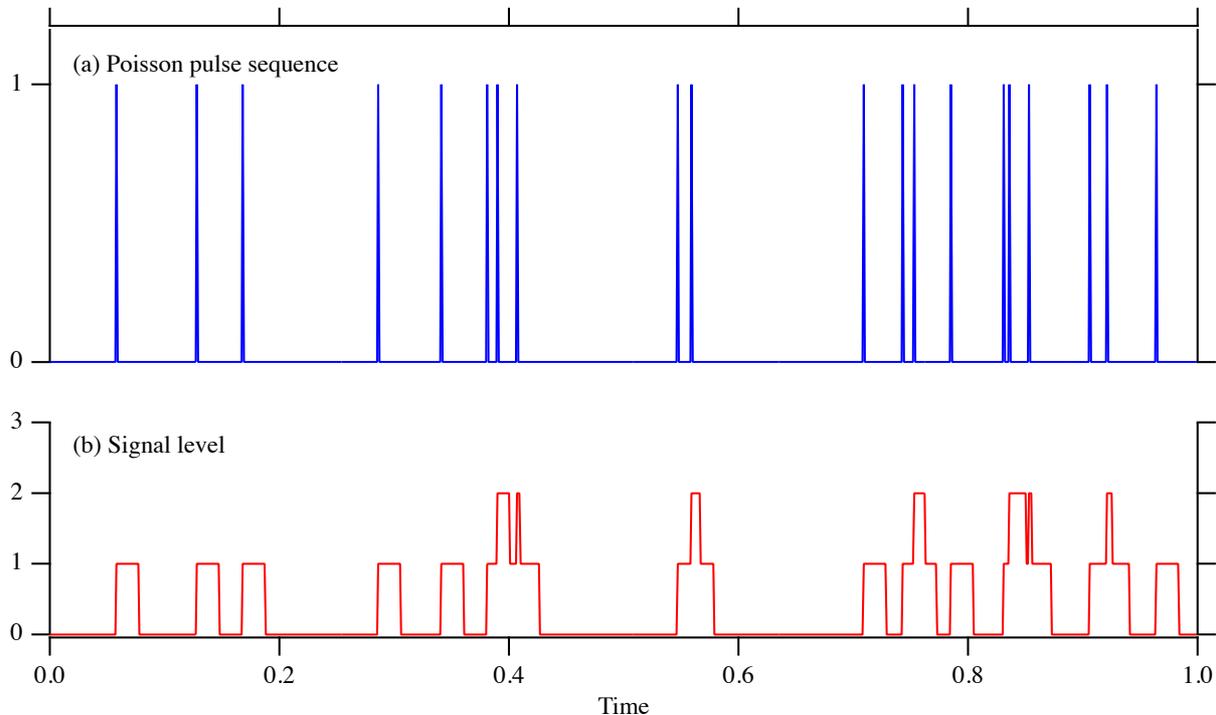
となり，尖度  $\gamma_2$  は，

$$\gamma_2 = \frac{\kappa_4}{\sigma^4} = \frac{np(1-p)(1-6p+6p^2)}{[np(1-p)]^2} = \frac{1-6p+6p^2}{np(1-p)} = \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)} \tag{11.2.D.3}$$

となります。 ( $\leftrightarrow$ )

### (補足 11.3.A) 数え落とし (↔)

最も基本的なパルス計数回路では、適当な<sup>いきち スレッシュホールド</sup>閾値 threshold を設定し、信号パルスの電圧が閾値以下から閾値以上に変化した時に 1 カウントするという動作をします。閾値以上から閾値以下に変化する時にはカウント数は変化させません。これでパルス数を積算できることにはなりますが、1つのパルスによって信号レベルが閾値を超えてから閾値を下回るまでの間に 2 つ目のパルスを受けた時に、これを検出することはできません。



**Fig. 11.1.3.A.1** ポアソン過程に従うイベントの数え落とし。(a) ポアソン過程に従うイベントの発生する時刻。ここでは 20 回のイベントが発生している。(b) イベントが有限の幅を持つ矩形（長方形）の電気信号パルスに置き換えられるとする。閾値を 0.5 として「立ち上がり検出」をすると、13 回のイベントは検出されるが、7 回のイベントは数え落とされる。

光子計数法での信号パルスの高さは光子エネルギーに概ね比例するので、パルス高分析 pulse height analysis によるエネルギー分解も可能です。ロー・パス・フィルターを介してノイズを低減させ、エネルギー分解能を高めることは可能ですが、そうするとパルスの幅は広がり、応答性が悪くなります。パルス検出システムの反応時間 response time とパルス高分析によるエネルギー分解能は、検出器が発生するパルスの幅そのものより、検出システム中の電気回路（波形整形回路・フィルター）の特性の影響を強く受けます。パルスの幅が短ければ高速な計数が可能ですが、ノイズの影響を受けやすくなり、エネルギー分解能は低下します。

(↔)

### (補足 11.3.B) 二項分布とポアソン分布の関係 (↔)

試行回数  $n$ 、平均値  $\lambda$  の二項分布を  $P_{\text{binomial}}(k; n, \lambda/n)$  として、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\text{binomial}}(k; n, \lambda/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \lambda^k \quad (11.3.B.1)$$

となりますが、 $k \ll n$ であれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1 \quad (11.3.B.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1 \quad (11.3.B.3)$$

であることと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-n} = e^{-\lambda} \quad (11.3.B.4)$$

という関係から、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\text{binomial}}(k; n, \lambda/n) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (11.3.B.5)$$

という関係が導かれます。

平均  $\lambda = 1$  として、試行回数  $n = 5, 10, 20$  の場合の二項分布 (binomial) とポアソン分布 (Poisson) の確率の値を Fig. 11.3.B.1 で比較します。この場合には、試行回数  $n = 20$  の二項分布でも、ポアソン分布にかなり近い値になっていることがわかります。

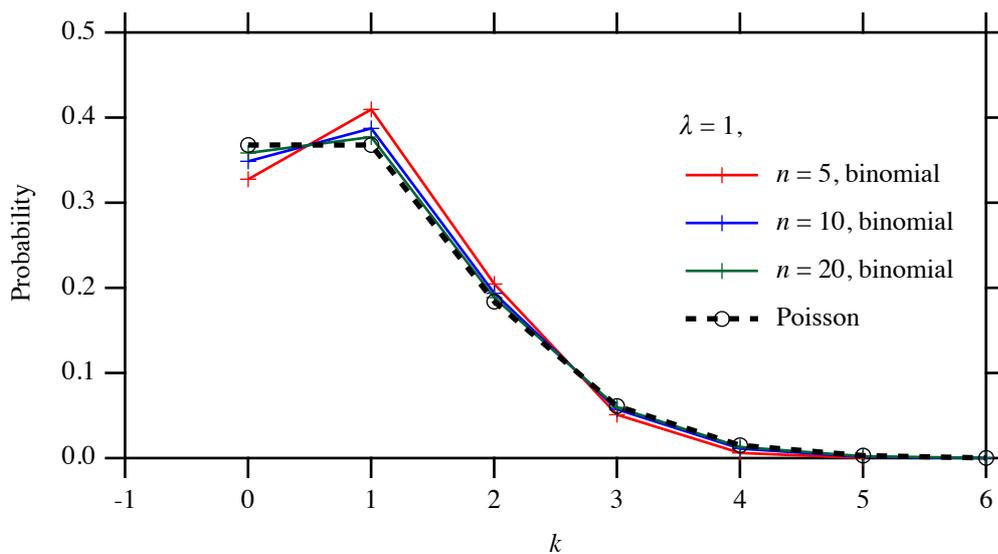


Fig. 11.3.B.1 二項分布とポアソン分布の比較

(↔)

### (補足 11.3.C) ポアソン分布のキュムラント (↔)

ポアソン分布

$$P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (11.3.C.1)$$

の確率密度関数  $f(x; \lambda)$  は、ディラックのデルタ関数  $\delta(x)$  を使えば

$$f(x; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \delta(x - k) \quad (11.3.C.2)$$

と書けることから、キュムラント母関数  $K(\theta)$  は

$$\begin{aligned} K(\theta) &= \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx = \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \delta(x-k) dx = \ln \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} \delta(x-k) dx \\ &= \ln \sum_{k=0}^{\infty} e^{\theta k} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \ln \left[ e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda e^{\theta})^k \right] = -\lambda + \ln \exp(\lambda e^{\theta}) = \lambda (e^{\theta} - 1) \end{aligned} \quad (11.3.C.3)$$

となり、

$$\frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 K(\theta)}{\partial \theta^2} = \dots = \lambda e^{\theta} \quad (11.3.C.4)$$

から、1階以上のキュムラント  $\kappa_k$  ( $1 \leq k$ ) はすべて

$$\kappa_k = \left[ \frac{\partial^k K(\theta)}{\partial \theta^k} \right]_{\theta=0} = \lambda \quad (11.3.C.5)$$

となります。 ( $\leftrightarrow$ )