

6. クーロン力 Coulomb force

第5章で「ファンデルワールス・ポテンシャルが距離の -6 乗に比例する（＝ファンデルワールス力の強さが距離の -7 乗に比例する）」仮定が使われました。もう少し正確な言い方をすると「分子間力と呼ばれるもののうち、**双極子-双極子分散相互作用**による引力は距離の -7 乗に比例する」とされます。このことは、電荷を持つ粒子の間に働くクーロン力により説明できます。また、原子同士が近づきすぎると反発力が働き、「それは交換反発力による」と説明されることが多いようです。実際には、そのうちのかなりの部分は正の電荷を持った原子核の間に働くクーロン相互作用で説明できます（単純なクーロン相互作用で説明できない部分は「交換相互作用による」こととなりますが、それが大部分と言うわけではありません）。

ここではクーロン力について見直すことにします。

6-1 点電荷によるポテンシャル Potential generated by a point charge

原点に点電荷 q を置いたとき、位置 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ にある「単位電荷」の受けるポテンシャルは、

$$V_q(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.1.1)$$

と表されます。ここで $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とします。記号 ϵ_0 は「真空の誘電率 permittivity of vacuum」（ $\epsilon_0 = 8.854\,187\,812\,8(13) \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ ）を表します。この書き方をするとき、 $V_q(\mathbf{r})$ はエネルギーでなく「電圧」あるいは「電位」の意味になります。ここではこれも「ポテンシャル」と呼びます。任意の電荷 q' の受けるポテンシャルはエネルギーとして表され、

$$\phi_{q'q}(\mathbf{r}) = q'V_q(\mathbf{r}) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.1.2)$$

となります。式 (6.1.1) を詳しく書けば、

$$V_q(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (6.1.3)$$

と表されます。

位置 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に置かれた点電荷 q をの作る電場 $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ は、「電位 $V_q(\mathbf{r})$ の勾配

gradient に負符号をつけたベクトル」であり、

$$\mathbf{E} = -\nabla V_q(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (6.1.4)$$

と表されます。電場 \mathbf{E} の向きは、式 (6.1.1) (あるいは式 (6.1.3)) で表される電位 $V_q(\mathbf{r})$ の下がる方向を向き、電場の強さ $E = |\mathbf{E}|$ は、「距離の -2 乗に比例する」ことに注意してください。

式 (6.1.3) を座標 x, y, z で偏微分すれば、電場の各成分が

$$E_x = -\frac{\partial V_q(x, y, z)}{\partial x} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6.1.5)$$

$$E_y = -\frac{\partial V_q(x, y, z)}{\partial y} = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6.1.6)$$

$$E_z = -\frac{\partial V_q(x, y, z)}{\partial z} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (6.1.7)$$

と表され、式 (6.1.4) の関係を確認できます。式 (6.1.4) は、式 (6.1.5) – (6.1.7) をまとめて表現するものであり、同じ意味であると言うことを確認してください。

点電荷 q を原点に置いたとき、位置 \mathbf{r} におかれた点電荷 q' の受ける力 \mathbf{f} は、

$$\mathbf{f} = q'\mathbf{E} = \frac{qq'\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (6.1.8)$$

と表されます。

6-2 双極子 Dipole

双極子 dipole という概念は、何か理解しにくく、受け入れにくいものであることは、ある意味で当然でしょう。

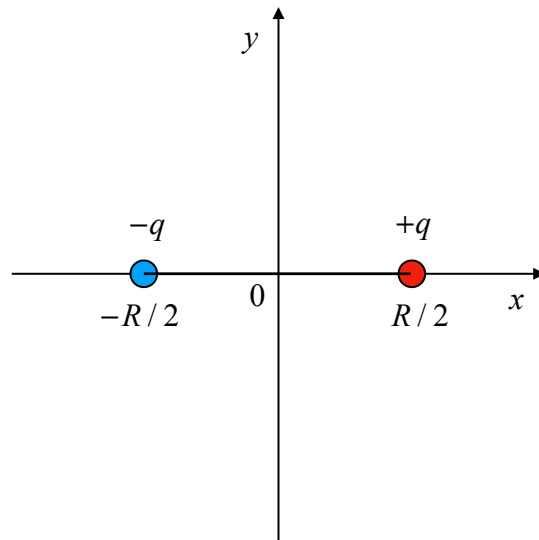


Fig. 6.2.1 正負の電荷 $\pm q$ を距離 R で配置する場合

双極子とは、[Fig. 6.2.1](#) に示すように「同じ絶対値を持つ正負の電荷が近くにあるもの」のようなことを意味します。では、その「近く」とは「どれくらい近く」なのでしょう？

双極子は3次元のベクトル $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ として表され、双極子の強さは「双極子モーメント」

で特徴づけられます。正負の電荷 $+q$, $-q$ が距離 R 離れた位置にあるとき、双極子モーメントは負の電荷から正の電荷に向かう方向を向くベクトルであり、その長さが qR で表されます ($p = |\mathbf{p}| = qR$)。

ところが、「抽象的な概念」としての双極子は、正確には「 $R \rightarrow 0$ の極限」で定義されます。例えば、 $\mathbf{p} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{p\mathbf{R}}{R}$ と書かれます。[Fig. 6.2.1](#) のような絵を思い浮かべたとして、正

負の電荷が「どれくらい近く」にある場合かと言えば、「無限にゼロに近い近さ」にある場合ということになります。双極子の大きさは「電荷の大きさ」と「電荷の間の距離」とをかけたものなので、「距離がゼロ」で「双極子モーメント」が有限の値だとすれば、「電荷は無限大」でなければいけません。そのようなことは現実にはあり得ません。

その「ありえなさ」は「質点=有限の質量を持つが大きさがゼロのもの」や「点電荷=有限の電荷を持つが大きさがゼロのもの」の「ありえなさ」と少し似ている面もあるのですが、例えば「電子」という実在の粒子について「多くの場合に点電荷かつ質点とみなしても良いだろう」と思えるのと比較して、「電気双極子」はそれと比べて「ありえなさ」の度合いが高くなっていることかもしれません。

どうして現実には存在しそうにない「双極子」という概念が使われるのでしょうか？「誘電分極など双極子として扱っても実際上差し支えない場合が多いこと」「双極子と扱えれば、いろいろな計算が楽になること」などが理由でしょう。

原点に双極子 \mathbf{p} を置いたとき、仮想的に原点位置に $-p/R$ の電荷、位置 \mathbf{R} に $+p/R$ の電荷があるとすることもできます。このとき、任意の位置 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で単位電荷が受けるポテンシャルは、

$$V_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \lim_{R \rightarrow 0} \left[V_{+p/R}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + V_{-p/R}(\mathbf{r}) \right] \quad (6.2.1)$$

と表されます。この式を解けば、

$$V_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (6.2.2)$$

となります (補足 6.2.A)。双極子から電荷が受けるポテンシャルは、距離の -2 乗に比例することに注意してください。

双極子 \mathbf{p} がつくる電場は

$$\mathbf{E} = -\nabla V_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \quad (6.2.3)$$

と表されます。したがって、電場の x, y, z 成分は

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[p_x - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})x}{r^2} \right] \quad (6.2.4)$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[p_y - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})y}{r^2} \right] \quad (6.2.5)$$

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[p_z - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})z}{r^2} \right] \quad (6.2.6)$$

となります (補足 6.2.B)。式 (6.2.4), (6.2.5), (6.2.6) をまとめて、

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\mathbf{p} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} \right] \quad (6.2.7)$$

と書く事ができます。このことは、「双極子のつくる電場の強さ」が距離の -3 乗に比例することを意味します。

Fig. 6.2.1 に示した「正負の電荷の組み合わせ」は、電荷間の距離 R が有限である限り

「『双極子』とは違うもの」ですが、電荷間距離 R に比べて「かなり離れた位置」で感じる「静電的なポテンシャル」あるいは「電場」は、「原点に相当する『双極子』があるとした場合」と区別がつかなくなります。

6-3 四極子 Quadrupole

四極子あるいは四重極 quadrupole は、[Fig. 6.3.1](#) のように「絶対値が等しく異符号の電荷を小さい正方形の頂点に交互にならべたもの」あるいは「逆向きの双極子を近くにおいたもの」と考えることができます。

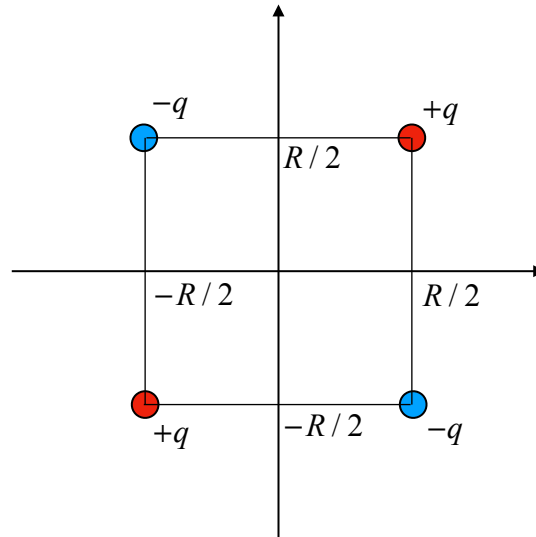


Fig. 6.3.1 正負の電荷の正方形型の配置

四極子モーメントは 3×3 の行列（二階テンソル） $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{yx} & Q_{zx} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{zy} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & Q_{zz} \end{pmatrix}$ で表されます。

電荷 q_i ($i = 1, \dots, M$) が $\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ の位置にあるとき、四極子モーメント \mathbf{Q} の各要素は

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^M \frac{q_i (3\alpha_i\beta_i - r_i^2\delta_{\alpha\beta})}{2} \quad (6.3.1)$$

と表されます。 α と β は x, y, z のいずれかを表すとします。また、 $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ とします。式 (6.3.1) の中の $\delta_{\alpha\beta}$ の記号は**クロネッカーのデルタ Kronecker delta** と呼ばれ、

$$\delta_{\alpha\beta} \equiv \begin{cases} 1 & [\alpha = \beta] \\ 0 & [\alpha \neq \beta] \end{cases} \quad (6.3.2)$$

として定義されます。式 (6.3.1) のように定義された四極子モーメント行列の「対角項の和 trace」は

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = \sum_{i=1}^M \left[\frac{q_i(3x_i^2 - r_i^2)}{2} + \frac{q_i(3y_i^2 - r_i^2)}{2} + \frac{q_i(3z_i^2 - r_i^2)}{2} \right] = 0 \quad (6.3.3)$$

のように必ずゼロになります。この性質は**トレースレス traceless** と呼ばれます。

[Fig. 6.3.1](#) のように, $+q, -q, +q, -q$ の電荷を $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} R/2 \\ R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -R/2 \\ R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} -R/2 \\ -R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} R/2 \\ -R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に配置する場合について考えます。

このとき任意の位置 \mathbf{r} で単位電荷が受けるポテンシャルは, r_1, r_2, r_3, r_4 が十分に小さい値の場合には,

$$V_{\text{square}}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{qR^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3xy) \quad (6.3.4)$$

となります ([補足 6.3.A](#)) 。

一方で, [Fig. 6.3.1](#) の配置での四極子モーメントの各成分は, 式 (6.3.1) に従って計算すれば,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 3qR^2/2 & 0 \\ 3qR^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3.5)$$

と表されます ([補足 6.3.B](#)) 。

原点に四極子 \mathbf{Q} を置いたとき, 位置 \mathbf{r} で単位電荷の受けるポテンシャルは,

$$V_{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \sum_{\beta \in \{x,y,z\}} Q_{\alpha\beta} \alpha\beta = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5} \quad (6.3.6)$$

と書くことができます。[Fig. 6.3.1](#) の配置の例では

$$V_{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & 3qR^2/2 & 0 \\ 3qR^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{qR^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3xy) \quad (6.3.7)$$

となって, 配置された点電荷のクーロンポテンシャルから $R \rightarrow 0$ の極限として計算された値:

$$V_{\text{square}}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{qR^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3xy)$$

と一致することが確認できます。

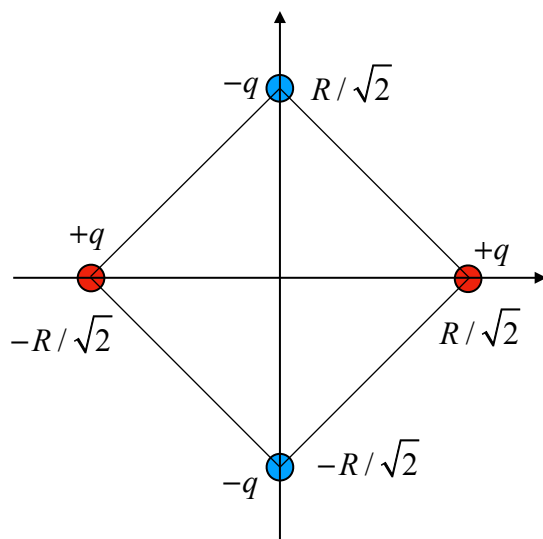


Fig. 6.3.2 正負の電荷の正方形型の配置 (その2)

Fig. 6.3.2 のように電荷 $+q, -q, +q, -q$ を $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} -R/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ におく場合, 任意の位置 \mathbf{r} で単位電荷が受けるポテン

シャルは, r_1, r_2, r_3, r_4 が十分に小さい値の場合には,

$$V_{\text{square}}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{qR^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} \frac{3(x^2 - y^2)}{2} \quad (6.3.8)$$

となります (補足 6.3.C)。

一方で, Fig. 6.3.2 の配置での四極子モーメントの各成分は, 式 (6.3.1) に従って計算すれば,

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3qR^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3qR^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3.9)$$

と表されます (補足 6.3.D)。

$$V_{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 3qR^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3qR^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{qR^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} \frac{3(x^2 - y^2)}{2} \quad (6.3.10)$$

となつて, 配置された点電荷のクーロンポテンシャルから $R \rightarrow 0$ の極限として計算された値:

$$V_{\text{square}}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{qR^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} \frac{3(x^2 - y^2)}{2}$$

と一致することが確認できます。

6-4 多極子 Multipole

八極子あるいは八重極 octupole は、「絶対値が等しく異符号の電荷を小さい立方体の頂点に交互にならべたもの」と考えることができます。八極モーメントは3階のテンソル ($3 \times 3 \times 3$) で表されます。十六極子 hexadecapole のモーメントは4階のテンソル ($3 \times 3 \times 3 \times 3$) で表されます。さらに三十二極子, 六十四極子, ... と極の数を増やすこともできます。

塩化水素 HCl, 水 H₂O, アンモニア NH₃ などの分子は, 有限の大きさの双極子モーメントを持ち, 大学の入学試験で普通「極性分子」と扱われます。二酸化炭素 CO₂ の分子は双極子モーメントは持ちませんが, 四極子モーメントは持つので, 「極性がない」わけではありません。メタン CH₄ や四塩化炭素 CCl₄ の分子は四極子モーメントもゼロですが, 八極子モーメントは有限なのでこれらも「極性がない」わけではありません。

ただし, モーメントが多極になればなるほど, その作るポテンシャルや電場の強さは「距離の増大に伴って急激に減衰する」傾向が強くなります。Table 6.4.1, Table 6.4.2 に多極子の間に働く静電ポテンシャルと静電 (クーロン) 力が距離の何乗に比例するかを示します。

Table 6.4.1 多極子間の静電ポテンシャルの距離 r 依存性

	点電荷	双極子	四極子	八極子
点電荷	$\propto r^{-1}$	$\propto r^{-2}$	$\propto r^{-3}$	$\propto r^{-4}$
双極子	$\propto r^{-2}$	$\propto r^{-3}$	$\propto r^{-4}$	$\propto r^{-5}$
四極子	$\propto r^{-3}$	$\propto r^{-4}$	$\propto r^{-5}$	$\propto r^{-6}$
八極子	$\propto r^{-4}$	$\propto r^{-5}$	$\propto r^{-6}$	$\propto r^{-7}$

Table 6.4.2 多極子間に働く静電 (クーロン) 力の距離 r 依存性

	点電荷	双極子	四極子	八極子
点電荷	$\propto r^{-2}$	$\propto r^{-3}$	$\propto r^{-4}$	$\propto r^{-5}$
双極子	$\propto r^{-3}$	$\propto r^{-4}$	$\propto r^{-5}$	$\propto r^{-6}$
四極子	$\propto r^{-4}$	$\propto r^{-5}$	$\propto r^{-6}$	$\propto r^{-7}$

八極子	$\propto r^{-5}$	$\propto r^{-6}$	$\propto r^{-7}$	$\propto r^{-8}$
-----	------------------	------------------	------------------	------------------

6-5 永久双極子と誘起双極子, 分散相互作用

Permanent dipole, induced dipole and dispersion interaction

塩化水素 HCl, 水 H₂O, アンモニア NH₃ などの分子は, 電場がゼロの環境でも有限の大きさの双極子モーメントを持ちます。このような分極を自発分極あるいは**永久双極子 permanent dipole** と呼びます。

永久双極子を持たない分子であっても, 貴ガス (18 族元素) の一つの原子であったとしても, 電場の中に置かれれば誘電分極が起こり, 双極子が現れます。これを**誘起双極子 induced dipole** と呼びます。分極の大きさは電場の強さに比例します。

「永久双極子の作る電場の強さ」は「点電荷が永久双極子から受ける力の強さ」と同じことです。[Table 6.4.2](#) から, これは距離の -3 乗に比例することがわかります。したがって, 永久双極子の作る電場による誘起双極子モーメントの強さも距離の -3 乗に比例します。双極子と双極子の間に働く静電ポテンシャルは距離の -3 乗に比例し, 静電力は距離の -4 乗に比例します。

結果として, 「永久双極子と誘起双極子の間に働く静電ポテンシャルは距離の -6 乗に比例し, 静電力は距離の -7 乗に比例する」こととなります。

仮に原子を「原子核の周囲を電子が軌道運動しているもの」とみなしてよければ, 「時間平均をとれば分極していない」としても, 「瞬間的には常に分極を持つ」こととなります。中性分子・原子の間にも「『永久双極子と誘起双極子の間に働く静電ポテンシャル・静電力』に相当する力」「距離の -7 乗に比例するファンデルワールス力 (分散力)」あるいは「双極子-双極子分散相互作用」が働くはずという考え方は, このことに由来します。

また, 「永久四極子と誘起双極子」または「永久双極子と誘起四極子」の組み合わせの場合, 「距離の -9 乗に比例する分散力」が導かれます。これを「双極子-四極子 (四重極子) 分散相互作用」と呼びます。

補足

(補足 6.2.A) 双極子によるポテンシャル (←)

式 [\(6.2.1\)](#) は, 以下のように解くことができます。

$$\begin{aligned}
V_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) &= \lim_{R \rightarrow 0} \left[V_{+p/R}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) + V_{-p/R}(\mathbf{r}) \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} - \frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{r - |\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{Rr|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \stackrel{|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \approx r}{=} \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{r - |\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{R} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{r - \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R} + R^2}}{R} \\
&= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{r^2} + \frac{R^2}{r^2} \right)^{1/2} \right] = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} \left[1 - \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{r^2} \right) \right] \\
&= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}}{R} \stackrel{\lim_{R \rightarrow 0} (p\mathbf{R}/R) = \mathbf{p}}{=} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}
\end{aligned}$$

(←)

(補足 6.2.B) 双極子の作る電場 (←)

双極子 $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ の作る電場の x 成分は

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial}{\partial x} V_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[p_x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - 3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})x (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[p_x - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})x}{r^2} \right] \tag{6.3.B.1}
\end{aligned}$$

となり，電場の y, z 成分も同じように

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[p_y - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})y}{r^2} \right] \tag{6.3.B.2}$$

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[p_z - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})z}{r^2} \right] \tag{6.3.B.3}$$

となります。 (←)

(補足 6.3.A) 正方形型交互配置点電荷の作る電場 (←)

Fig. 6.3.1 のように配置された点電荷から，位置 \mathbf{r} の単位電荷が受けるポテンシャルは，

$$\begin{aligned}
V_{\text{square}}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_3|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_4|} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1 + r_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2 + r_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3 + r_3^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_4 + r_4^2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r^2} + \frac{r_1^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2}{r^2} + \frac{r_2^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3}{r^2} + \frac{r_3^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_4}{r^2} + \frac{r_4^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \tag{6.3.A.1}
\end{aligned}$$

と表されます。以下の関係：

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{3}{2}} \tag{6.3.A.2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{3}{2}} \right] = \frac{3}{4} (1-x)^{-\frac{5}{2}} \tag{6.3.A.3}$$

から、

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \frac{x^2}{2} + \dots = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots \tag{6.3.A.4}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{square}}(\mathbf{r}) &\rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r^2} - \frac{r_1^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r^2} - \frac{r_1^2}{r^2} \right)^2 \right. \\
&\quad - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2}{r^2} - \frac{r_2^2}{r^2} \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2}{r^2} - \frac{r_2^2}{r^2} \right)^2 + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3}{r^2} - \frac{r_3^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3}{r^2} - \frac{r_3^2}{r^2} \right)^2 \\
&\quad \left. - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_4}{r^2} - \frac{r_4^2}{r^2} \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_4}{r^2} - \frac{r_4^2}{r^2} \right)^2 \right] \\
&\rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \left[1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r^2} - \frac{r_1^2}{2r^2} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)^2}{2r^4} \right] - \left[1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2}{r^2} - \frac{r_2^2}{2r^2} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2)^2}{2r^4} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3}{r^2} - \frac{r_3^2}{2r^2} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3)^2}{2r^4} \right] - \left[1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_4}{r^2} - \frac{r_4^2}{2r^2} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_4)^2}{2r^4} \right] \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)}{r^2} - \frac{r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r^2} + \frac{3 \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3)^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_4)^2 \right]}{2r^4} \right\} \tag{6.3.A.5}
\end{aligned}$$

となります。Fig. 6.3.1 の例では $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} R/2 \\ R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -R/2 \\ R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} -R/2 \\ -R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} R/2 \\ -R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ としていることから

$$\begin{aligned}
V_{\text{square}}(\mathbf{r}) &\rightarrow \frac{3q \left[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_3)^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_4)^2 \right]}{8\pi\epsilon_0 r^5} \\
&= \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 r^5} \left[\left(\frac{xR}{2} + \frac{yR}{2} \right)^2 - \left(-\frac{xR}{2} + \frac{yR}{2} \right)^2 + \left(-\frac{xR}{2} - \frac{yR}{2} \right)^2 - \left(\frac{xR}{2} - \frac{yR}{2} \right)^2 \right] \\
&= \frac{3qR^2 \left[2(x+y)^2 - 2(-x+y)^2 \right]}{32\pi\epsilon_0 r^5} = \frac{qR^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} (3xy) \tag{6.3.A.6}
\end{aligned}$$

の関係が得られます。 (\leftarrow)

(補足 6.3.B) 正方形型交互配置点電荷の四極子モーメント (←)

Fig. 6.3.1 のように $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} R/2 \\ R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -R/2 \\ R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} -R/2 \\ -R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} R/2 \\ -R/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ の位置に $+q, -q, +q, -q$ の点電荷が配置されている場合, 式 (6.3.1) の表現

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^M \frac{q_i (3\alpha_i\beta_i - r_i^2 \delta_{\alpha\beta})}{2} \quad (6.3.B.1)$$

に従って四極子モーメントを求めると,

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(3x_i^2 - r_i^2)}{2} = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2)}{2} \\ &= \frac{q}{2} \left[2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2 \left(-\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + 2 \left(-\frac{R}{2}\right)^2 - \left(-\frac{R}{2}\right)^2 - 2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(-\frac{R}{2}\right)^2 \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.B.2)$$

$$\begin{aligned} Q_{yy} &= \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(3y_i^2 - r_i^2)}{2} = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(-x_i^2 + 2y_i^2 - z_i^2)}{2} \\ &= \frac{q}{2} \left[-\left(\frac{R}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(-\frac{R}{2}\right)^2 - 2 \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(-\frac{R}{2}\right)^2 + 2 \left(-\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2 \left(-\frac{R}{2}\right)^2 \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.B.3)$$

$$\begin{aligned} Q_{zz} &= \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(3z_i^2 - r_i^2)}{2} = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(-x_i^2 - y_i^2 + 2z_i^2)}{2} \\ &= \frac{q}{2} \left[-\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(-\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(-\frac{R}{2}\right)^2 - \left(-\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(-\frac{R}{2}\right)^2 \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.3.B.4)$$

$$\begin{aligned} Q_{xy} = Q_{yx} &= \sum_{i=1}^4 \frac{3q_i x_i y_i}{2} = \frac{3q}{2} \left[\left(\frac{R}{2}\right) \left(\frac{R}{2}\right) - \left(-\frac{R}{2}\right) \left(\frac{R}{2}\right) + \left(-\frac{R}{2}\right) \left(-\frac{R}{2}\right) - \left(\frac{R}{2}\right) \left(-\frac{R}{2}\right) \right] \\ &= \frac{3qR^2}{2} \end{aligned} \quad (6.3.B.5)$$

$$Q_{yz} = Q_{zy} = \sum_{i=1}^4 \frac{3q_i y_i z_i}{2} = 0 \quad (6.3.B.6)$$

$$Q_{xz} = Q_{zx} = \sum_{i=1}^4 \frac{3q_i x_i z_i}{2} = 0 \quad (6.3.B.7)$$

となり, 式 (6.3.5) の関係:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 3qR^2/2 & 0 \\ 3qR^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が導かれます。 (←)

(補足 6.3.C) 正方形型交互配置点電荷の作る電場 (その2) (←)

Fig. 6.3.2 のように配置された点電荷から, 位置 \mathbf{r} の単位電荷が受けるポテンシャルは,

$$\begin{aligned}
V_{\text{square}}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|} + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_3|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_4|} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1 + r_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_2 + r_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_3 + r_3^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_4 + r_4^2}} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1}{r^2} + \frac{r_1^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_2}{r^2} + \frac{r_2^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_3}{r^2} + \frac{r_3^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_4}{r^2} + \frac{r_4^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \tag{6.3.C.1}
\end{aligned}$$

と表されます。以下の関係：

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{3}{2}} \tag{6.3.C.2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{3}{2}} \right] = \frac{3}{4} (1-x)^{-\frac{5}{2}} \tag{6.3.C.3}$$

から、

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\frac{x^2}{2} + \dots = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \dots \tag{6.3.C.4}$$

$$\begin{aligned}
V_{\text{square}}(\mathbf{r}) &\rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1}{r^2} - \frac{r_1^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1}{r^2} - \frac{r_1^2}{r^2} \right)^2 \right. \\
&\quad - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_2}{r^2} - \frac{r_2^2}{r^2} \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_2}{r^2} - \frac{r_2^2}{r^2} \right)^2 + 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_3}{r^2} - \frac{r_3^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_3}{r^2} - \frac{r_3^2}{r^2} \right)^2 \\
&\quad \left. - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_4}{r^2} - \frac{r_4^2}{r^2} \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_4}{r^2} - \frac{r_4^2}{r^2} \right)^2 \right] \\
&\rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \left[1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1}{r^2} - \frac{r_1^2}{2r^2} + \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1)^2}{2r^4} \right] - \left[1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_2}{r^2} - \frac{r_2^2}{2r^2} + \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_2)^2}{2r^4} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_3}{r^2} - \frac{r_3^2}{2r^2} + \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_3)^2}{2r^4} \right] - \left[1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_4}{r^2} - \frac{r_4^2}{2r^2} + \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_4)^2}{2r^4} \right] \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)}{r^2} - \frac{r_1^2 - r_2^2 + r_3^2 - r_4^2}{2r^2} + \frac{3 \left[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1)^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_3)^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_4)^2 \right]}{2r^4} \right\} \tag{6.3.C.5}
\end{aligned}$$

となります。Fig. 6.3.2 の例では $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} -R/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ としてい

ることから

$$V_{\text{square}}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{3q \left[(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1)^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_3)^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_4)^2 \right]}{8\pi\epsilon_0 r^5}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 r^5} \left[\left(\frac{xR}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{yR}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{xR}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(-\frac{yR}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \\
&= \frac{qR^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} \frac{3(x^2 - y^2)}{2}
\end{aligned} \tag{6.3.C.6}$$

の関係が得られます。 (←)

(補足 6.3.D) 正方形型交互配置点電荷の四極子モーメント (その2) (←)

Fig. 6.3.2 のように $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} R/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} -R/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -R/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ との位置に

$+q, -q, +q, -q$ の点電荷が配置されている場合、式 (6.3.1) の表現

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^M \frac{q_i (3\alpha_i\beta_i - r_i^2\delta_{\alpha\beta})}{2} \tag{6.3.D.1}$$

に従って四極子モーメントを求めると、

$$\begin{aligned}
Q_{xx} &= \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(3x_i^2 - r_i^2)}{2} = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(2x_i^2 - y_i^2 - z_i^2)}{2} \\
&= \frac{q}{2} \left[2 \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \left(-\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = \frac{3qR^2}{2}
\end{aligned} \tag{6.3.D.2}$$

$$\begin{aligned}
Q_{yy} &= \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(3y_i^2 - r_i^2)}{2} = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(-x_i^2 + 2y_i^2 - z_i^2)}{2} \\
&= \frac{q}{2} \left[-\left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(-\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = -\frac{3qR^2}{2}
\end{aligned} \tag{6.3.D.3}$$

$$\begin{aligned}
Q_{zz} &= \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(3z_i^2 - r_i^2)}{2} = \sum_{i=1}^4 \frac{q_i(-x_i^2 - y_i^2 + 2z_i^2)}{2} \\
&= \frac{q}{2} \left[-\left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(-\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.3.D.4}$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \sum_{i=1}^4 \frac{3q_i x_i y_i}{2} = 0 \tag{6.3.D.5}$$

$$Q_{yz} = Q_{zy} = \sum_{i=1}^4 \frac{3q_i y_i z_i}{2} = 0 \tag{6.3.D.6}$$

$$Q_{xz} = Q_{zx} = \sum_{i=1}^4 \frac{3q_i x_i z_i}{2} = 0 \tag{6.3.D.7}$$

となり、式 (6.3.9) の関係：

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3qR^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3qR^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が導かれます。 (←)

